Title	Activity Analysis と立地モデル
Author(s)	小林, 清晃
Citation	經濟論叢 (1968), 101(1): 94-110
Issue Date	1968-01
URL	http://dx.doi.org/10.14989/133244
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

經濟論叢

第101巻　第1号

佐波宣平教授記念號

昭和43年1月

京都大學經濟學會

Activity Analysis と立地モデル

小　林　清　晃

I　はじめに

経済活動は，空間的な広がりと時間的な流れを舞台にして，自由競争あるいは独占的競争のメカニズムを具現する。企業は，空間的に異なった位置にある生産要素を，最適な技術で結合して，ある高さの生産レベルを達成し，その結果，生産物を企業の生産活動の場とは異なった点に位置する市場へ供給する。そこで採用されている生産技術は資本設備が所与という短期分析において，最適な技術であるかも知れないし，また，可変的な資本設備量を前提とする長期分析において，その最適性が把えられるべきであるかも知れない。さらに，時間の経過の中で把える最適資本ストック構成は如何という問題もある。微視的分析においても巨視的分析においても，時間項の導入による短期分析から長期分析へ，また静学理論から動学理論への発展は，理論的レベルにおいて著しいものがある。特に，企業の主体的均衡理論すなわち企業の理論に，線型計画法 (linear programming) や動的計画法 (dynamic programming) を援用して，時間的な path として企業の最適化行動を把えることができる。時間的な流れの次元に沿い，それを強調する方向の理論的発展は多くの fruitful な結果を産み出している。

他方，空間的な広がりの次元を積極的に経済理論へ導入して，経済活動の空間的最適配置を扱う分野は，それほどの発展を見ていない。近来，社会問題化しつつある都市の過密化，都市交通の渋滞，工場から流れ出る公害，地域開発，これらはすべて，私的生産設備，公共設備，経済主体等の最適配置の問題につながってくる。この問題に対しては，一般的には，地域間産業連関分析が，極めて有力な理論的基礎を提供するのみならず，具体的問題へのアプローチと

しても優れた applicability をもっている。

空間的に財貨の流れの最適パターンを求める手法としては，線型計画法における輸送問題 (transportation problem) がある。

a_i ：供給地 i における供給キャパシティ

b_j ：需要地 j における所要量

c_{ij}：輸送ルート $i \rightarrow j$ における単位当り輸送費

x_{ij}：輸送ルート $i \rightarrow j$ における輸送量

のように記号を定めれば，輸送問題は次のように定式化される。

$$\sum_j x_{ij}=a_i, \quad \sum_i x_{ij}=b_j, \quad x_{ij} \geqq 0$$

の制約の下で，総輸送費

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$$

を最小にせよ。問題自体がこのように定式化が許されるならば，その解は極めて容易に，単純な iteration によって得られる。しかし，問題がこのように標準的な輸送問題に定式化されるためには，すでに，需要地，供給地の確定した立地が前提されていなければならない。われわれは，上記の標準的輸送問題を変形させた立地モデルを考えることができることを示すであろう。

本稿では，微視的な次元で，あるいは，個別企業のベースで，企業の最適立地問題に対して activity analysis の手法でもって接近していく。立地アクティヴィティを変数化して生産活動の最適化問題を体系的に定式化したのは，A. Weber[1] であり，そして，Weber を評価する方向で，視覚的に理解容易なグラフによる解析を与えたのは L. Moses である。われわれは極めてシンプルな Moses の分析を手がかりとして進むことにしたい。

§Ⅱでは，Moses の所論を要約し[2]，かつ，Beckmann-Marschak[3] の立地分析を簡単に紹介し，それらを出発点として，§Ⅲで，activity analysis のアプローチで Moses のモデルを再構成し，さらに代替的投入要素が m 個の場合

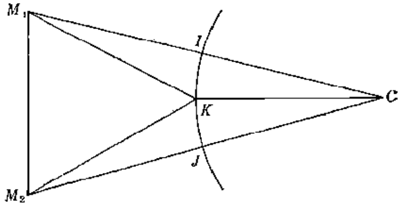
1) Weber, (5).
2) Moses, (3).
3) Beckmann & Marschak, (1).

に拡張する。 Moses のモデルでは， 市場からの距離が一定のところに，工場 (plant) が立地するという仮定が付せられているが，それを除去して，最適立地問題を扱おうとするのが§Ⅳである。さらに,§Ⅴでは，Beckmann-Marschak のモデルを， 若干変形し， 最適な plant location 問題として再構成しその双対問題をもあわせて考えることにする。

なお，§Ⅲ以下で扱われる生産アクティヴィティについては加法性，分割性，独立性が保証されるという仮定，および§Ⅲ－§Ⅳについては代替的投入要素の各々について，ただ一つの供給地が存在する，すなわち，ある一つの投入要素とその供給地は一対一に対応するという仮定が設けられているとする。

Ⅱ　Moses モデルと Beckmann-Marschak モデル

Moses は伝統的な生産理論ないし企業理論と立地理論を結合して，企業の立地均衡を論じた。図1のように，二つの生産要素 M_1，M_2 の供給地と一つの市場 C が存在する。市場から一定の距離 h の点に工場を立地させるとき，C を中心とし，半径 h の円を描けば，弧 IJ が立地可能点の集合を与える。問題の設定に関してあらかじめ次のデータは既知であるとする。



第　1　図

p_1：生産要素 M_1 の供給地における価格 (f. o. b. 価格)

p_2：生産要素 M_2 の供給地における価格 (　　〃　　)

s_1：M_1 の供給地から工場 K までの距離

s_2：M_2 の供給地から工場 K までの距離

r_1：M_1 の輸送における運賃率

r_2：M_2 の輸送における運賃率

以上のデータをもとにして，工場 K における M_1，M_2 の引渡し価格 (f. o. b.

価格＋運賃）を算出すれば次のようになる。

M_1 の引渡し価格　$P_1=p_1+r_1s_1$

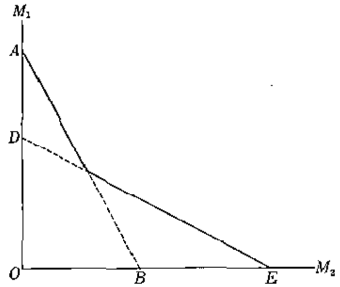
M_2 の引渡し価格　$P_2=p_2+r_2s_2$

かくて，価格比率

(2—1)　$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{p_1+r_1s_1}{p_2+r_2s_2}$$

は工場がKに立地するときの等支出線 (iso-outlay line) の勾配を示す。工場がIに立地するとき，またJに立地するとき，それらの各々における等支出線も，(2—1)で s_1，s_2 を適当に変化させることによって得られる。

図2を見よう。線分 AB は工場が I に立地するときの等支出線を示し，また，線分 DE は工場が J に立地するときの等支出線を示している。なお，点線の部分は，生産要素に対する一定の支出額の下で，立地点を異にすることによってそれよりもより多くの生産要素を購入することが可能であるという意味で有効でない部分をあらわす。



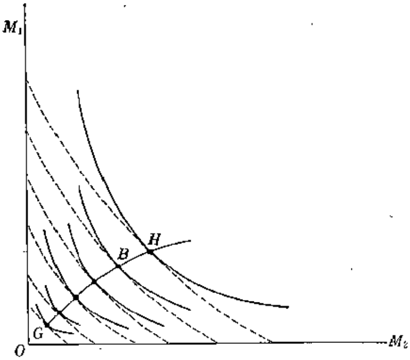
第　2　図

工場立地点が I から J へ連続的に移行するとすれば，それに応じて，等支出線も無数に描かれ，そのうちの有効な等支出線の集合として，滑らかな原点に対して凸の等支出曲線が得られるであろう。そしてこれを立地代替における等支出曲線 (locational iso-outlay curve) と呼ぼう。この locational 等支出曲線 IJ 上の各点は弧上の特定の立地点に対応し，逆に，立地点が一つ指定されれば，それに対応する等支出線は locational 等支出曲線と唯一点で接するであろう。そしてその接点は，その立地点における最適な要素投入比率を決定する。

いま，所与の生産水準のもとで，費用最小化の問題を考えよう。それは伝統的な企業理論で扱われている周知の問題である。容易にわかるように，そのグラフ解は，等生産量曲線 (iso-quant curve) と等支出線の接点で，投入要素比率及び，それらの水準が決定される。立地の連続的代替を認めているわれわれ

の問題で云えば，所与の等生産量曲線と locational 等支出曲線の接点が解を与える。等生産量曲線の曲率が locational 等支出曲線の曲率よりも大であれば，等生産量曲線は locational 等支出曲線に対して上方より接する。そして等生産曲線の東北方向への拡大とともに拡張径路 (expansion path) が得られる。以上を図示すれば，図3のようになり，点線で示されているカーヴは locational 等支出曲線をあらわし，実線で示されているカーヴは等生産量曲線をあらわす。また線分 GBH は，等生産量曲線と locational 等支出曲線の接点の軌跡であり，拡張径路を示している。

生産関数が規模に関して収穫不変ならば，拡張径路 GBH は直線になるであろう[4]。また，等生産量曲線の曲率が locational 等支出曲線の曲率よりも小であるならば，均衡点は M_1 軸あるいは M_2 軸上にくるであろう。



第 3 図

次に，Moses は市場の規模すなわち需要のスケールを分析に導入する。単純化のために，生産要素は物的要素 M と労働 L とし，それらの生産要素を供給する地点は二点存在して，一つは M 点として，もう一つは市場であるとする。また，M 点では市場よりも，物的要素 M の価格は安く，逆に労働 L の価格は高いものとする。工場立地可能点は M 点と市場のいずれかであるとすれば，最適立地点はいずれの点であろうか。

図4でもって以上の問題を扱うことができる。locational 等支出曲線は，原

---

4) 拡張径路は，産出量水準について要素価格比＝限界生産力の比，が成立する点の軌跡である。一次同次の生産関数 $Y=F(X_1, X_2)$ の両辺を X_2 で除し，$Y/X_2=y$，$X_1/X_2=x$ とおけば，

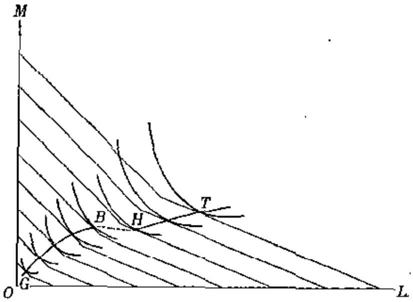
$$y=F(x, 1)=f(x)$$

を得る。X_1 の限界生産力$=f'(x)$，X_2 の限生産力$=f(x)-xf'(x)$ であるから，均衡条件

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{f'(x)}{f(x)-xf'(x)}, \qquad P_i：第 i 要素価格（const.）$$

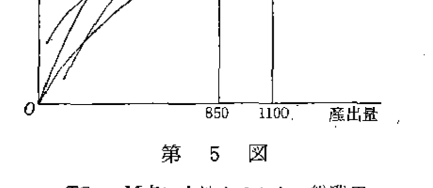
から決定されるものは，投入要素の結合比率であり，それでいかなる水準の産出量に対しても成立する。したがって拡張径路は直線である。

点に対して凸に屈曲した直線である。勾配の大なる方はM点に立地する場合の等支出線を示し，勾配の小なる方は市場に立地する場合の等支出線を示している。



第 4 図

拡張径路は，矢張り，等産出量曲線と locational 等支出曲線との接点の軌跡 ($GBHT$) でもって与えられる。接点については次の事実が認められることに注意したい。第一に，接点は所与の産出水準に対する最適立地を与え，第二は，その立地点における最適要素結合比率を示すことである。図4の示す拡張径路によれば，産出水準が800単位以下では，M点に立地するのが最適であり，産出水準が800単位を越えれば，市場に立地するのが最適となる。



第 5 図

TC_m：M点に立地するときの総費用
TC_c：市場に立地するときの総費用
TR_m：M点に立地するときの総収入
TR_c：市場に立地するときの総収入

われわれは，先程から「最適」という言葉を用いているが，それは，所与の産出水準を達成するための生産費支出の最小化という意味である点に注意しなければならない。企業にとって真の最適化は純収入（利潤）の最大化であるとすれば，生産物を工場立地点から市場へ輸送する際の輸送費用をも考慮して，最適化を実現する必要がある。そのためには，図5の如く二つの可能立地点における市場への輸送費用を含めた総費用曲線と総収入曲線を描いて，その差額としての純収入の最大点を見

い出せばよい。

総収入曲線の形がてい減していることは，市場において独占的競争が支配的であることを反映している。また，TR_c と TR_m の垂直差は市場への生産物の総輸送費をあらわしている。図5からわかるように，もし生産物の輸送費がゼロであれば（したがって $TR_m=TR_c$ であれば），M 点に立地し850単位の生産水準のときに利潤が最大となる。けれども，輸送費がゼロではないとすれば，市場に立地し，1100単位の生産をあげるときが利潤最大を与える。したがって，総収入曲線を導くもとになっている需要曲線がシフトすれば，最適立地及び最適生産水準は変化するであろう。

かくて，Moses の分析をしめくくれば次のようになる。最適立地は次の諸要因に基づくものといえる。(ｉ) 投入要素価格，(ii) 投入要素及び生産物の輸送費，(iii) 生産関数，(iv) 需要関数，(v) 要素供給地及び市場の位置。

次にBeckmann-Marschak モデルを見よう。それは，単一の生産アクティヴィティをもつ企業が，いくつかの投入要素の供給地，工場，生産物市場の間の投入要素の輸送及び生産物の輸送の最適パターンを求めようとする問題である。まず，記号を次のように定める。

p_k：第 k 市場における生産物価格

p_i^m：第m投入要素の第 i 供給地（原料地）における f. o. b. 価格

q_i^m：第m投入要素の第 i 供給地における供給キャパシティ

c_j：第 j 工場における生産キャパシティ

a^m：生産物一単位を産出するために必要な第m投入要素量

x_{ij}^m：第 i 供給地から第 j 工場への第m投入要素の流量

x_{jk}：第 j 工場から第 k 市場への生産物の流量

t_{ij}，t_{jk}：各々，i から j，j から k への財一重量単位の輸送費（すべての財は重量単位で測定されている）

かくて問題は次のように定式化される。

$$a^m\sum_k x_{jk}-\sum_i x_{ij}^m\leqq 0$$

$$\sum_j x_{ij}^m \leqq q_i^m$$
$$\sum_k x_{jk} \leqq c_j$$
$$x_{ij}^m \geqq 0,\quad x_{jk} \geqq 0$$

の制約の下で，利潤P

$$P=\sum_j\sum_k(p_k-t_{jk})x_{jk}-\sum_i\sum_m\sum_j(p_i^m+t_{ij})x_{ij}^m$$

を最大にせよ。

この問題は，標準的輸送問題にくらべて，(i) 生産アクティヴィティを explicit に入れている，(ii) 投入要素と生産物の両者の輸送パターンの最適化，という点で異なっている。明らかに，このモデルは標準的輸送問題を包含する，より広いモデルであるといえる。しかし，このモデルといえども，立地はすべて確定したものと前提され，その下での最適輸送ルートの選択の問題にすぎない。この点については§Ⅴで再考しよう。

Ⅲ 市場からの距離が一定のケース

前節で Moses の分析を概観したのであるが，それは三つの基本的な仮定の下で展開された。第一は，生産関数が滑らかな形をしていること，いいかえれば，連続的な要素代替が可能であること。第二は，工場の立地点が空間的に連続(spatially continuous) であること。第三は，工場の立地点は市場から一定距離にあること。本節では，まず第一に Moses で仮定されたような生産関数が各要素について連続的な微分可能性を排除して，その代り，生産関数は有限個の生産アクティヴィティであらわされるものとする。すなわち，生産については，activity analysis によってアプローチする。第二に，工場の立地点は有限個であること，そしてその場合，原料供給地 ⟶ 立地点 ⟶ 市場の間の距離は，各立地点に対して既知であるとする。なお，市場から立地点への距離は一定であるとする。Moses の場合に比べて，われわれのこれらの仮定の方がより reality が高いものと思われる。特に立地点が無限に連続的に変化し得るという仮定は余りにも非現実的である。企業が立地に関する意志決定を下す場合にも，あらかじめ，

いくつかの代替的立地点の候補の中から選択するという形でなされるであろう。

さて，分析の展開上，二段階に分けて進むことにしたい。

(i) 生産アクティヴィティ：n 個，投入要素：二種類

§Iで仮定しように，投入要素とその供給地は一対一に対応する故，投入要素が二種類ということは原料供給地が二点ということである。次のように記号を定めよう。

a_{ij}：生産物一単位を産出するために必要な第 j アクティヴィティにおける第 i 要素の投入量

y_j^k：第 k 立地点における第 j アクティヴィティの稼動水準

x_{ij}^k：第 k 立地点における第 j アクティヴィティによる生産に投入される第 i 要素の投入量 $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$

p_{ik}：第 k 立地点における第 i 要素の引渡し価格（第 i 要素の f. o. b. 価格＋$i\to k$ の運賃）

いかなる立地点を選んでも，そこから市場への距離は一定とされているから，生産物の単位当り輸送費は同じである。したがって，生産物の輸送費は立地選択に何ら影響を与えないから，問題の定式化の中であらかじめ生産物の輸送費を落すことができる。

問題の定式化に移ろう。いま，市場における生産物の需要量が与えられているものとすれば，それに見合った所与の生産量を実現するための最小費用をもたらすような立地点および生産アクティヴィティの選択は如何という問題になる。所与の生産量を $\bar{y}$ とする。

まず生産関数は次のように与えられる。

$$y_j^k=\min\left(\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}},\ \frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}\right)$$

したがって，制約条件

$$\sum_k\sum_j \min\left(\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}},\ \frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}\right)\geqq\bar{y},\ \ x_{1j}^k\geqq0,\ \ x_{2j}^k\geqq0$$

の下で，目的関数

$$T=\sum_k\left(p_{1k}\sum_j x_{1j}^k+p_{2k}\sum_j x_{2j}^k\right)$$

を最小化せよ，というのがわれわれの問題の定式化である。

結果的に最適解では，

$$\frac{x_{1j}^{k}}{a_{1j}}=\frac{x_{2j}^{k}}{a_{2j}}=y_j^k$$

が成立する故，上記の問題は，

(3—1) $\sum_j\sum_k y_j^k \geqq \bar{y},\ \ y_j^k \geqq 0$

の制約の下で，目的関数は，総費用

(3—2) $T=\sum_j\sum_k(p_{1k}a_{1k}+p_{2k}a_{2j})y_j^k$

を最小化せよ，という線型計画法の問題になる。

あるいは，次のような型の問題を考えることもできる。総費用$\bar{T}$が与えられており，その下で，生産量を最大にせよ。これを定式化すれば，

(3—3) $\sum_j\sum_k(p_{1k}a_{1j}+p_{2k}a_{2j})y_j^k \leqq \bar{T},\ \ y_j^k \geqq 0$

の制約の下で，

(3—4) $y=\sum_j\sum_k y_j^k$

を最大にせよ。これも，典型的な線型計画問題である。

まず，前者の問題を考えよう。線型計画法の定理によれば，退化(degeneracy)のない場合，最適解においては，制約式の個数に等しい変数が正の水準の値をとり，他の変数はゼロである。われわれの問題では，(3—1)の制約式が1個である。したがって，最適解ではただ一つの y_j^k だけが正である。かくて，目的関数 (3—2) の係数を比較してその最小のものに対応する y_j^k を選べば，それが，最適解を与える。そして，その値は，制約式(3—1)から求めることができる。すなわち，

(3—5) $(j^*,\ k^*)=[(j,\ k)|\min(p_{1k}a_{1j}+p_{2k}a_{2j})]$

とすれば，

(3—6) $y_{j^*}^{k^*}=\bar{y}$, その他の$(j,\ k)$に対して，$y_j^k=0$

が最適解を与える。

次に，後者の型の問題を考えよう。この場合も，(3—3)で示される制約式の個数は一個である故，前者の場合と全く同様に，最適解では変数 y_j^k のうちた

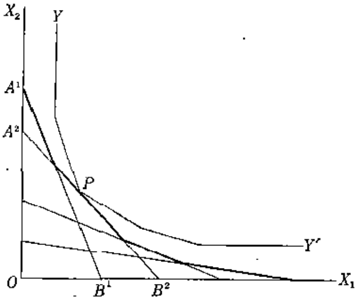
だ一つだけが正で他はすべてゼロである。かくて，問題の意味からして，単位当り生産費が最小になるような y_j^k が選択される。つまり，(3—3)の左辺の係数が最小のものに対応する y_j^k が正の値をとる。その y_j^k は(3—5)で与えられる(j^*, k^*)に対応する $y_{j^*}^{k^*}$ と同じである。そしてその水準は，

$$y_{j^*}^{k^*}=\frac{\overline{T}}{p_{1k}a_{1j}+p_{2k}a_{2j}}$$

で与えられる。

以上で明らかなように，上記の二つの型の問題に対する最適解は同一の変数を正の水準に採り入れている[5]。つまり，最適立地点とそこにおける最適生産アクティヴィティが共通である。

図解による説明を簡単に与えておく。図6で横軸に第1要素の投入量，縦軸に第2要素の投入量を測ることにする。各々の立地点に対応して，等支出線 A^1B^1, A^2B^2，……が得られ，それらのうち有効な等支出線の部分が，Moses のいう locational 等支出曲線を構成する。Moses の場合と異なって，地理的に連続に立地点が変化せず，不連続な立地間代替のために，locational 等支出曲線は，太字の線分で描かれているような，屈曲した形になる。また，等産出量曲線も，屈曲した YY' の形をとる。かくて，支出一定のとき，産出量最大の点は locational 等支出曲線と等産出量曲線の接点 P で決定される。また，拡張径路は直線になることも容易にわかるであろう。



第 6 図

(ii)　生産アクティヴィティ：n個，投入要素：m種類

この場合への拡張は容易である。(3—1)(3—2)の型の問題は次のように拡張される。

$$\sum_j\sum_k y_j^k \geqq \overline{y},\quad y_j^k \geqq 0$$

5)　このことは伝統的企業理論からも示唆されることである。

の制約の下で，

$$T=\sum_j\sum_k\sum_i p_{ik}a_{ij}y_j^k$$

を最小にせよ。

(3—3)，(3—4)の型の問題の拡張も容易である故省略する。また，(ｉ)の場合の最適解について述べたことが全くそのまま(ii)の場合にもあてはまるであろう。

Ⅳ 市場からの距離が可変的なケース

Moses の分析あるいはその activity analysis による再構成を通じて仮定された，工場立地点—市場の距離が一定のケースをさらに拡張して，それが可変的であるものとして，最適立地問題を定式化しよう。記号は前節で定めたものに加えて，次のものを設けておく。

t_{kc}：第 k 立地点から市場への生産物一単位当り輸送費

(ｉ) 生産アクティヴィティ：n 個，投入要素：二種類

費用一定の下で生産量最大の問題は次のように定式化される。

(4—1) $$\sum_k\left[p_{1k}\sum_j x_{1j}^k+p_{2k}\sum_j x_{2j}^k+t_{kc}\sum_j \min\left(\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}},\ \frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}\right)\right]\leqq \bar{T}$$

$$x_{1j}^k\geqq 0,\quad x_{2j}^k\geqq 0$$

の制約の下で，

(4—2) $$y=\sum_j\sum_k \min\left(\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}},\ \frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}\right)$$

を最大にせよ。問題の性質からみて，結果的には，最適解において，

$$\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}}=\frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}=y_j^k$$

が成立する故，問題は次のように再定式化されうる。

(4—3) $$\sum_j\sum_k(p_{1k}a_{1j}+p_{2k}a_{2j}+t_{kc})y_j^k\leqq \bar{T},\qquad y_j^k\geqq 0$$

の制約の下で

(4—4) $$y=\sum_j\sum_k y_j^k$$

を最大にせよ。

(4—1), (4—2)の形の定式化を，投入要素空間で図解してみよう。図7参照。

例えば，いま，第k立地点において，第jアクティヴィティを稼働させるときの等支出線を描いてみよう。

(4—1)から，そのときの等支出線は

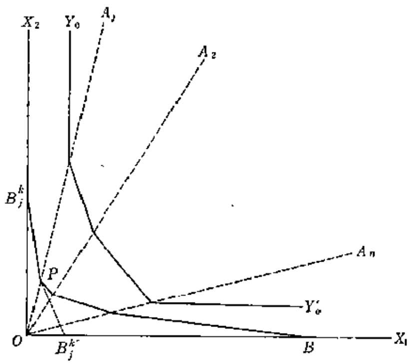
$$p_{1k}x_{1j}^k+p_{2k}x_{2j}^k+t_{kc}\min\left(\frac{x_{1j}^k}{a_{1j}},\ \frac{x_{2j}^k}{a_{2j}}\right)=\bar{T}$$

となるが，これは次の二つに分割される。

(イ)　$\dfrac{x_{2j}^k}{x_{1j}^k}\geqq\dfrac{a_{2j}}{a_{1j}}$ のとき，$\left(p_{1k}+\dfrac{t_{kc}}{a_{1j}}\right)x_{1j}^k+p_{2k}x_{2j}^k=\bar{T}$

(ロ)　$\dfrac{x_{2j}^k}{x_{1j}^k}<\dfrac{a_{2j}}{a_{1j}}$ のとき，$p_{1k}x_{1j}^k+\left(p_{2k}+\dfrac{t_{kc}}{a_{2j}}\right)x_{2j}^k=\bar{T}$

第jアクティヴィティを含む半直線を A_j とすれば，(イ)が成立するときの範囲は，X_2軸と半直線 A_j で囲まれる部分であり，そのとき，線分B_j^kPが描かれる。他方，(ロ)が成立する範囲は X_1 軸と半直線 A_j によって囲まれる部分で，そのときには線分 $PB_j^{k\prime}$ が描かれる。(イ)の場合の線分の勾配は(ロ)の場合の線分の勾配よりも大であることは容易にわかる。したがって，屈曲した線分 $B_j^kPB_j^{k\prime}$ が，第k立地点で第jアクティヴィティを採用するときの等支出線になり，それは原点に凸な形をしている[6]。いろいろアクティヴィティを変えることによって，それに対応する半直線上で屈曲した等支出線が描かれるであろう。それに加えて，立地点のそれぞれに対応して，同様な等支出線を描くことができる。結局，k, j の変化のそれぞれに対応して描かれた等支出線のうち原点から最も



第　7　図

6)　等支出線の勾配は，単なる投入要素価格比ではなく，生産物の単位当り輸送費を投入要素に割り付けた上での価格比である点は注意を要する。

遠い線分のみをつらねて，それを有効等支出フロンティア[7](efficient iso-outlay frontier) と呼ぶことができるであろう。図７では屈曲した線分 B_j^kB がそれであるとする。等産出量曲線は屈曲した曲線 Y_0Y_0' によって示され，有効等支出フロンティアに接するように等産出量曲線が動き，接点において，最適な立地点および投入要素の結合水準が決定される。われわれは，(4—1)，(4—2)の問題の図解を与えたのであるが，それはすでに見たように(4—3)，(4—4)の問題と同値である。(4—3)，(4—4)の線型計画法の問題は，制約式が一本である故，退化がなければ，最適解ではただ一つの y_j^k のみが正となる。このことは，図７で見れば，有効等支出フロンティアと等産出量曲線との接点が A_1，A_2，……，A_n のどれか一つの半直線上にあることを意味する。

（ii） 生産アクティヴィティ：n 個，投入要素：m 種類

投入要素をm種類に拡張するについては説明を加えずとも，次のように定式化されることは容易に理解されるであろう。

$$\sum_k\left[\sum_i\sum_j p_{ik}x_{ij}^k+t_{kc}\sum_j \min_i\left(\frac{x_{ij}^k}{a_{ij}}\right)\right]\leqq T,\qquad x_{ij}^k\geqq 0$$

の制約の下で，

$$y=\sum_j\sum_k \min_i\left(\frac{x_{ij}^k}{a_{ij}}\right)$$

を最大にせよ。あるいは，これと同値な次のような問題として定式化することもできる。

$$\sum_j\sum_k\left(\sum_i p_{ik}a_{ij}+t_{kc}\right)y_j^k\leqq T,\quad y_j^k\geqq 0$$

の制約の下で

$$y=\sum_j\sum_k y_j^k$$

を最大にせよ。

なお，本節では，すべて，費用一定——産出量最大化の問題として扱ったが，産出量一定——費用最小化としても容易に定式化されるが，それについては省略したい。

7) Moses の locational iso-outlay curve に対応する。

V 一般化されたモデル

前節まで扱ったモデルは，単一市場であること，および各々の要素供給地がその供給地固有のただ一種類の要素のみを供給し，供給地と投入要素とは一対一に対応することが仮定されていた。われわれは，それらの仮定を除いたより一般化されたモデルを定式化しよう。それは Beckmann-Marschak のモデルの variation とみることもできる。§Ⅱの Beckmann-Marschak モデルに際して用いられた記号をそのまま適用し，さらに，

q_k：第 k 市場における需要量

を既知量として加える。いま，各供給地には供給キャパシティはなく，制約は，各立地点において必要投入量が充たされていること ((5—1)) と各市場において少くとも生産物需要量を充たすだけの供給量がなければならないこと ((5—2)) の二種類である。したがって，次のように定式化される。

(5—1) $$a^m \sum_k x_{jk} - \sum_i x_{ij}{}^m \leqq 0$$

(5—2) $$\sum_j x_{jk} \geqq q_k$$

$$x_{ij}{}^m \geqq 0,\quad x_{jk} \geqq 0$$

の制約条件の下で，目的関数として，利潤

(5—3) $$P = \sum_j \sum_k (p_k - t_{jk}) x_{jk} - \sum_i \sum_j \sum_m (p_i{}^m + t_{ij}) x_{ij}{}^m$$

を最大にせよ。

工場立地点は代表的に j で示されているが，それはいくつかの立地可能点の中の一つであり，最適解においていかなる k に対しても $x_{jk}=0$ であれば，第 j 立地可能点には立地しないことを意味する[8]。 Beckmann-Marschak のモデルでは，第 j 工場立地点の生産キャパシティ c_j をモデルの中に考慮している故，そこでは既に工場立地が確定していることを意味している。それに対して，(5—1)—(5—3) の線型計画問題で定式化されたモデルは，最適な立地点の選択

8) あるいは，最適解において $\sum_k x_{jk}=0$ or $\sum_m \sum_i x_{ij}{}^m=0$ であれば，第 j 立地点には立地しないことを意味する。

の問題を含み，同時に投入要素及び生産物の最適輸送ネットワークを見い出そうとするものである。

問題(5—1)—(5—3)の最適解では，(5—2)は等号で成立しなければならない。したがって；(5—2)の代りに

(5—2)′ $\sum_{j} x_{jk} = q_k$

を制約条件とすれば，目的関数(5—3)は

$$P = \sum_{k} p_k q_k - [\sum_{j}\sum_{k} t_{jk} x_{jk} + \sum_{i}\sum_{j}\sum_{m} (p_i^m + t_{ij}) x_{ij}^m]$$

となり $\sum p_k q_k$ は定数である故，総費用

(5—3)′ $C = \sum_{j}\sum_{k} t_{jk}\, x_{jk} + \sum_{j}\sum_{k}\sum_{i} (p_i^m + t_{ij}) x_{ij}^m$

を最小化せよ，という問題に帰せられる。整理すれば，(5—1)，(5—2)′および変数の非負条件の下で，(5—3)′を最小にせよ，がわれわれの定式化である。

最後に，(5—1)，(5—2)′，(5—3)′の双対モデルに触れておこう。u_j^m，u_k を双対変数とするならば，

(5—4) $u_j^m \leqq p_i^m + t_{ij}$

(5—5) $u_k \leqq \sum_{m} a^m u_j^m + t_{jk}$

$u_j^m \geqq 0$

が双対問題の制約条件である。Koopmans によるところのいわゆる efficiency condition[9] から，最適解においては(5—4)，(5—5)について次の関係が成立しなければならない。

(5—6)
$x_{ij}^m > 0$ ならば $u_j^m = p_i^m + t_{ij}$
$x_{jk} > 0$ ならば $u_k = \sum a^m u_j^m + t_{jk}$

あるいは

(5—7)
$u_j^m < p_i^m + t_{ij}$ ならば $x_{ij}^m = 0$
$u_k < \sum_{m} a^m u_j^m + t_{jk}$ ならば $x_{jk} = 0$

双対問題の一つの経済的解釈を簡単に与えることができる。u_j^m は第 j 工場

9) Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, John Wiley, 1951, Chap. III, pp. 60–65.

立地点における第m投入要素の潜在価格 (shadow price), u_k は第 k 市場における生産物の潜在価格とすれば, (5—6), (5—7)は, 潜在価格で評価すれば, 最適解において無利潤 (zero profitability) の状態が成立することを示している。このことから, 最適解はある種の競争均衡解としての解釈が与えられる。

VI 市場規模と立地

Moses は市場の需要水準 (市場規模) の変化することにより, 最適立地点がその影響を受けることを示した。市場における独占的競争を認め, したがって, 生産物価格は売り上げ量 (市場規模) の減少関数になり, 目的関数としての利潤の中に影響因子として市場規模が入ることに加えて, 生産関数が必ずしも一次同次でない場合に, そのことが示された。

§IIIおよび§IVでは生産関数が一次同次であることが仮定されている故, たとえ市場において独占的競争が支配的であっても, 市場規模は立地点選択に影響を与えないであろうと帰結されることは注意されなければならない。

しかし, §V で提示された多市場モデルでは, 市場規模の変動すなわち制約条件の一つ(5—2)の q_k の変化は, その問題における変数の値は勿論のこと, 最適立地点も変化させることになる。かくて, それは q_k の変化による parametric programming 問題にみちびくであろう。

(本稿は昭和42年度文部省科学研究費 (試験研究) による研究成果の一部である。)

参 考 文 献

(1) Beckmann, M. & Marschak, T.: "An Activity Analysis Approach to Location Theory", *Kyklos*, Vol. VIII, No. 2, 1955.

(2) Isard, W.: *Location and Space Economy*, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1962, 邦訳：木内信蔵監訳「立地と空間経済」朝倉書店, 1964.

(3) Moses, L.: "Location and the Theory of Production", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 73, May 1958.

(4) ——: "A General Equilibrium Model of Production, Interregional Trade, and Location of Industry", *The Review of Economics and Statistics*, Nov. 1960.

(5) Weber, A.: *Über den Standort der Industrien*, Tübingen, 1922, 邦訳：江沢譲爾監修「工業立地論」大明堂, 1966.

(6) 笹田友三郎：「地域の科学」紀伊国屋書店, 1964.